Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, Vol. 1, 4, 79-93 (1985)

ANALISIS DE UN METODO NUMERICO CON ELEMENTOS FINITOS PARA PROBLEMAS DE CONTACTO UNILATERAL SIN ROZAMIENTO EN ELASTICIDAD
PARTE I.– Formulación física y matemática de los problemas.

JUAN M. VIAÑO REY
Departamento de Ecuaciones Funcionales. Facultad de Matemáticas.
Universidad de Santiago de Compostela. España.

RESUMEN

En esta primera parte del trabajo se plantean los problemas de contacto unilateral en elasticidad sin rozamiento objeto de estudio, incluyéndose una exposición general sobre el estado actual del tema. El contacto con sólido rígido (Problema de Signorini) y el contacto con sólido elástico se reducen a una misma formulación matemática utilizando los principios variacionales y la teoría de operadores monótonos.

SUMMARY

Part I of this work is devoted to present the contact problems without friction in elasticicy to solve. After a general overview, the contact problems with a rigid and elastic frictionless foundation are put into a same mathematical formulation by using the variational principles and monotone operators theory.

INTRODUCCION

El presente estudio está dedicado al análisis numérico de problemas de contacto unilateral sin rozamiento que tienen lugar en elasticidad. Se utiliza una aproximación con elementos finitos para analizar el comportamiento de cuerpos elásticos que tienen una parte de su frontera susceptible de entrar en contacto (después de la deformación) con otro cuerpo, ya sea de naturaleza rígida (problema de Signorini) o también elástica (material de Winkler-Westergaard).

Estos problemas son de naturaleza no lineal inherente, dado que a priori no se conoce qué parte de la frontera del cuerpo está en contacto con el otro cuerpo elástico o rígido. En consecuencia deben imponerse condiciones de contacto unilateral que hacen intervenir tensiones y desplazamientos desconocidos en la superficie susceptible de contacto. Este tipo de problemas se discuten con mucho detalle en Duvaut-Lions[20], Kikuchi-Oden[27] y Oden-Pires[34]. La existencia, unicidad y regularidad de soluciones basándose en la formulación variacional, originalmente investigada por Duvaut-Lions[20] puede encontrarse también en los trabajos de Glowinski[22] y Brezis[10].

La discretización de una *versión simplificada del problema de Signorini* utilizando elementos finitos polinomiales, incluyendo estimaciones del error, se estudia sistemáticamente en Glowinski[22], y Brezzi-Hager-Raviart[15]. El problema discreto equivale

Recibido: Marzo 1985

ISSN 0213-1315

que tangencialmente los movimientos no están sometidos a restricción alguna. La traducción de este hecho es:

$$\sigma_n(u) \leqslant 0, \quad \sigma_{ti} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N \tag{8}$$

Resumiendo la condición de contacto unilateral sin rozamiento en Γ_C con base rígida se expresa

$$\left.\begin{aligned} & u_n \leqslant s, \quad \sigma_n(u) \leqslant 0 \\ & \sigma_n(u)(u_n - s) = 0 \\ & \sigma_{ti} = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant N \end{aligned}\right\} \text{ en } \Gamma_C \tag{9}$$

La segunda condición significa que $\sigma_n(u)$ sólo puede ser no nula si el contacto se produce.

Contacto con otro sólido de respuesta elástica

Supongamos ahora que el cuerpo S está compuesto por un material de tipo Winkler-Westergaard de modo que su resistencia a la penetración se produce en la dirección de la normal y es proporcional a dicha penetración. Tal tipo de material suele modelizarse por medio de una densidad de muelles de rigidez k normales a la frontera del sólido Ω. Las deformaciones son independientes unas de otras: si se apoya sobre un punto, sólo este punto sufrirá un desplazamiento. Este modelo, aún siendo una representación grosera de la realidad, ha sido utilizado con éxito en numerosas circunstancias del cálculo de puentes, por ejemplo.

Dado que S puede ser penetrado puede ocurrir, a diferencia del caso anterior, que $u_n > s$. El razonamiento precedente debe cambiarse entonces únicamente si esto sucede. En ese caso ocurrirá que

$$\sigma_n(u) = -k(u_n - s), \quad (k > 0), \quad \sigma_{ti} = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{10}$$

siendo k una constante de rigidez propia del material S. En ingeniería esta constante se conoce con el nombre de módulo de balasto.

Por tanto, la condición de contacto con sólido elástico se resume en:

$$\left.\begin{aligned} & u_n \leqslant s \ \Rightarrow \ \sigma_n(u) = 0 \\ & u_n > s \ \Rightarrow \ \sigma_n(u) = -k(u_n - s), \ k > 0 \\ & \sigma_{ti} = 0, \ 1 \leqslant i \leqslant N. \end{aligned}\right\} \text{ en } \Gamma_C \tag{11}$$

Finalizamos esta sección recapitulando los dos problemas de contorno cuya resolución numérica abordaremos posteriormente.

Encontrar un campo de desplazamientos $u = (u_i)$ *en* Ω *verificando*

$$\begin{aligned} & \partial_j \sigma_{ij}(u) + f_i = 0 && \text{en } \Omega, \\ & u_i = 0 && \text{en } \Gamma_D. \\ & \sigma_{ij}(u) n_j = g_i && \text{en } \Gamma_F, \end{aligned} \tag{12}$$

y las condiciones de contacto unilateral,

$$\begin{aligned} &u_n \leqslant s, \quad \sigma_n(u) \leqslant 0, \\ &\sigma_n(u)(u_n - s) = 0, \qquad \text{en } \Gamma_C \\ &\sigma_{ti} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

ó bien

$$\begin{aligned} &u_n \leqslant s \implies \sigma_n(u) = 0 \\ &u_n > s \implies \sigma_n(u) = -k(u_n - s), \ (k > 0), \qquad \text{en } \Gamma_C \\ &\sigma_{ti} = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

En esta sección hemos seguido, esencialmente las exposiciones de Duvaut-Lions[20] y Oden-Pires[34]. Señalemos que actualmente se investiga activamente el problema análogo con rozamiento (la condición $\sigma_{ti} = 0$ debe ser reemplazada). La clásica ley de fricción de Coulomb y nuevas leyes no locales se analizan en recientes trabajos entre los que citamos Oden-Pires[34], Campos-Oden-Kikuchi[16], Martins-Oden[30] y Cocu[19].

FORMULACION VARIACIONAL

En esta sección veremos que los problemas (12)-(13) y (12)-(14) pueden ser escritos en forma variacional lo que permitirá posteriormente hacer uso de los resultados de la teoría de optimización. Nos limitaremos a esquematizar la exposición de las ideas generales recomendando Duvaut-Lions[20] para más detalle y a Adams[1] en lo referente a los espacios de Sobolev utilizados. Comenzaremos introduciendo el espacio de Hilbert.

$$V = \left\{ v = (v_1, v_2, \ldots, v_N) \in [H^1(\Omega)]^N : v = 0 \text{ en } \Gamma_D \right\}. \tag{15}$$

donde $H^1(\Omega)$ es el espacio de Sobolev usual de funciones de $L^2(\Omega)$ con derivadas en el sentido de las distribuciones en $L^2(\Omega)$. Se supone que la medida de Γ_D es $m(\Gamma_D) > 0$.

Se supondrá, en lo que sigue, que las fuerzas externas son tales que

$$f_i \in L^2(\Omega), \quad g_i \in L^2(\Gamma_F), \quad 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{16}$$

y los coeficientes de elasticidad del material Ω verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} &a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \qquad \max_{1 \leqslant i,j,k,l \leqslant N} \|a_{ijkl}\|_{\infty,\Omega} \leqslant M \\ &a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk} = a_{klij}, \ \text{c.p.d. en } \Omega \quad 1 \leqslant i,j,k,l \leqslant N, \\ &a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant \alpha\, \xi_{ij}\, \xi_{ij}, \ \text{para todo } \xi = (\xi_{ij}) = (\xi_{ji}) \in R^{N^2}, \ \text{c.p.d. en } \Omega \ (\alpha > 0). \end{aligned} \tag{17}$$

Se define sobre V la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_\Omega a_{ijkl}\, \epsilon_{kl}(u)\epsilon_{ij}(v)dx = \int_\Omega \sigma_{ij}(u)\epsilon_{ij}(v)dx, \quad u,v\epsilon V \tag{18}$$

y la forma lineal

$$L(v) = \int_\Omega f_i v_i dx + \int_{\Gamma_F} g_i v_i d\gamma\,, \quad v\epsilon V. \tag{19}$$

Bajo las hipótesis (16) y (17) se prueba (ver Duvaut-Lions[20]) que $a(.,.)$ es una forma bilineal V-elíptica y contínua, esto es:

$$|a(u,v)| \leqslant M \, \| u \|_{1,\Omega} \, \| v \|_{1,\Omega} \quad \forall u,v\epsilon V$$

$$a(v,v) \leqslant m \, \| v \|^2_{1,\Omega} \qquad \forall v\epsilon V, \; m>0,$$

donde $\| \, \|_{1,\Omega}$ es la norma usual en $[H^1(\Omega)]^N$. Asimismo la forma bilineal L es contínua (es decir, $L\epsilon V'$, V' dual de V). La norma en $L^2(\Omega)$ se denotará $\| \, \|_{0,\Omega}$.

Supondremos finalmente que la función de distancia al obstáculo verifica

$$s\epsilon L^2(\Gamma_C). \tag{20}$$

Formulación variacional del problema de Signorini

Las restricciones (13) imponen el siguiente conjunto de desplazamientos admisibles

$$K = \left\{ v\epsilon V: \; v_n = v_i n_i \leqslant s \;\;, \;\; \text{c.p.d. en } \Gamma_C \right\}. \tag{21}$$

K es un conjunto convexo, cerrado y no vacío de V. En Duvaut-Lions[20], mediante una adecuada aplicación de la fórmula de Green, se prueba la equivalencia formal de (12)-(13) con la siguiente inecuación variacional de primera especie:

$$\begin{aligned} &\bullet \; u\epsilon V \\ &a(u,v-u) \geqslant L(v-u), \quad \forall v\epsilon K. \end{aligned} \tag{22}$$

En Glowinski[22] por ejemplo, se prueba que en las hipótesis (20) y (21) el problema (22) admite una y una sóla solución que (por ser $a(.,.)$ simétrica) coincide con el problema de minimización con restricciones siguiente:

$$J(u) = \min_{v\epsilon K} J(v) \tag{23}$$

donde J es el funcional de energía potencial de nuestro problema:

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v), \quad \forall v\epsilon V. \tag{24}$$

Sea $I_K: V \to [-\infty,+\infty]$ la función indicatriz del convexo K:

$$I_K(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v\epsilon K \\ +\infty & \text{si } v\notin K. \end{cases} \tag{25}$$

Entonces (22) se escribe como la inecuación variacional de segunda especie

$$\begin{aligned} & u \epsilon V \\ & a(u,v-u) + I_K(v) - I_K(u) \geqslant L(v-u), \quad \forall v \epsilon V, \end{aligned} \tag{26}$$

que equivale al problema de minimización

$$u \epsilon V, \quad \psi(u) = \min_{v \epsilon V} \psi(v) \tag{27}$$

donde

$$\psi(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) + I_K(v). \tag{28}$$

Esta última forma de escribir el problema (17) se utilizará posteriormente. Ciertos aspectos relativos a la regularidad de la solución de (18) probablemente no han sido abordados en su generalidad. En relación con el tema, por ejemplo, en Brezis[10] se estudia el problema de Signorini simplificado:

$$\begin{aligned} & u \epsilon K = \left\{ v \epsilon H^1(\Omega): \ v \geqslant g \ \text{ c.p.d. en } \Gamma \right\} \\ & \int_\Omega \nabla u . \nabla (v-u) dx + \int_\Omega u(v-u) dx \geqslant \int_\Omega f(v-u), \quad \forall v \epsilon K. \end{aligned} \tag{29}$$

Se prueba que para $g = 0$ y Ω un dominio con frontera regular (o bien Ω poligonal convexo) si $f \epsilon L^2(\Omega)$ se tiene $u \epsilon H^2(\Omega) \cap W^{1,+\infty}(\Omega)$.

Formulación variacional del problema de contacto con sólido elástico

Por razones de homogeneidad en la notación posterior pondremos $\lambda = 1/k$, siendo k la constante de rigidez que aparece en (14). Sea $\beta_\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación

$$\beta_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\lambda} x & \text{si } x > 0, \qquad x \epsilon \mathbb{R}. \end{cases} \tag{30}$$

Dada una función cualquiera $\phi: \Gamma_C \to \mathbb{R}$ sea $G_\lambda(\phi): \Gamma_C \to \mathbb{R}$ la función

$$G_\lambda(\phi) = \beta_\lambda(\phi - s) \tag{31}$$

Es evidente, entonces, que la condición (14) puede escribirse en la forma:

$$\sigma_n(u) = -G_\lambda(u_n) \quad \text{en } \Gamma_C. \tag{32}$$

Se deduce, entonces, de la manera habitual (fórmula de Green) que el problema de contacto con sólido elástico (12)-(14) es equivalente al siguiente problema variacional elíptico no lineal:

$$\begin{aligned} & u \epsilon V \\ & a(u,v) + (G_\lambda(u_n), v_n) = L(v), \quad \forall v \epsilon V \end{aligned} \tag{33}$$

donde $(.,.)$ indica el punto escalar en $L^2(\Gamma_C)$:

$$(\phi,\psi) = \int_{\Gamma_C} \phi\psi d\gamma \quad , \quad \forall\phi,\ \psi\epsilon L^2(\Gamma_C). \tag{34}$$

En lo sucesivo notaremos por $G_\lambda : L^2(\Gamma_C) \to L^2(\Gamma_C)$ la restricción de la aplicación G_λ a $L^2(\Gamma_C)$. Se observará que se tiene explícitamente:

$$G_\lambda(q) = \frac{1}{\lambda}(q-s)^+ \ , \ \forall q\epsilon L^2(\Gamma_C), \tag{35}$$

donde

$$p^+ = \max\{0,p\} \quad , \quad p\epsilon L^2(\Gamma_C). \tag{36}$$

Sea $B^* : V \to L^2(\Gamma_C)$ el operador lineal contínuo definido por:

$$B^*v = v_{n|\Gamma_C} = v_{i|\Gamma_C} n_i \quad , \quad \forall v\epsilon V \tag{37}$$

y sea $B : L^2(\Gamma_C) \to V'$ el operador lineal dual de B^*, i.e.:

$$\langle Bq,v\rangle = (q,B^*v) = \int_{\Gamma_C} q v_n d\gamma \quad , \quad \forall q\epsilon L^2(\Gamma_C) \quad , \quad \forall v\epsilon V, \tag{38}$$

donde $\langle .,. \rangle$ denota la dualidad $V'V$.

Sea $\phi_\lambda : V \to V'$ la aplicación no lineal:

$$\phi_\lambda = BG_\lambda B^* \tag{39}$$

Con estas notaciones el problema (33) adquiere la forma:

$$\begin{aligned} &u\epsilon V \\ &a(u,v) + \langle\phi_\lambda(u),v\rangle = L(v) \quad , \quad \forall v\epsilon V. \end{aligned} \tag{40}$$

Problemas generales del tipo (40) se estudian en Lions[28], Glowinski[22] y Brezis-Crandall-Pazy[13]. Para el caso particular (40) damos a continuación una sencilla demostración de existencia y unicidad de solución. Para ello, sea U el siguiente conjunto convexo, cerrado y no vacío de $L^2(\Gamma_C)$:

$$U = \{q\epsilon L^2(\Gamma_C) : \ q \leqslant s \quad \text{c.p.d. en } \Gamma_C\}. \tag{41}$$

Notamos por $P_U : L^2(\Gamma_C) \to U$ el operador de proyección ortogonal sobre el convexo U. Se verifica entonces inmediatamente que:

$$G_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - P_U) \tag{42}$$

donde I es el operador identidad en $L^2(\Gamma_C)$. Sea $(I_U)_\lambda : L^2(\Gamma_C) \to \mathbb{R}$ la aplicación

$$(I_U)_\lambda(q) = \frac{1}{2\lambda} \| q - P_U q \|^2_{0,\Gamma_C}. \tag{43}$$

La aplicación $(I_U)_\lambda$ es diferenciable y además:

$$(I_U)'_\lambda = G_\lambda \tag{44}$$

Una justificación de esta forma de proceder se encontrará posteriormente . Sea entonces $J: V \to \mathbb{R}$ el funcional de energía

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) + (I_U)_\lambda(B^*v) = \\ = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) + \frac{1}{2\lambda} \| v_n - P_U v_n \|^2_{0,\Gamma_C} \tag{45}$$

De (44) se sigue que el problema (40) es la ecuación de Euler del siguiente problema de minimización:

$$u \in V, \quad J(u) = \min_{v \in V} J(v) \tag{46}$$

De la V-elipticidad de **a** y de la convexidad de la función $(I_U)_\lambda$ se deduce fácilmente que

$$J \text{ es estrictamente convexa} \tag{47}$$

$$\lim_{\| v \|_{1,\Omega} \to +\infty} J(v) = +\infty \tag{48}$$

En estas condiciones se deduce que (46) –y por tanto (33)– tiene una única solución (véase Ekeland-Teman[21]). Resultados de regularidad de la solución para problemas del tipo (40) pueden encontrarse en Brezis-Crandall-Pazy[13]. Conviene recordar que toda solución del problema variacional de segunda clase:

$$\begin{aligned} & u \in V \\ & a(u,v-u) + (I_U)_\lambda(B^*v) - (I_U)_\lambda(B^*u) \geq L(v-u) \quad , \quad \forall v \in V \end{aligned} \tag{49}$$

es solución de (46) (véase Glowinski[22]). Por tanto (49) tiene una única solución que coincide con la del problema (33). Esta es otra forma equivalente de escribir el problema de contacto con sólido elástico.

Observación 1).– Es evidente que la función indicatriz del convexo K definido en (21) se factoriza en la forma $I_K = I_U \circ B^*$ de modo que el problema de Signorini (26) equivale a:

$$\begin{aligned} & u \in V \\ & a(u,v-u) + I_U(B^*v) - I_U(B^*u) \geq L(v-u) \quad , \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{50}$$

Se observa entonces que ambos problemas se reducen a formulaciones análogas que además están íntimamente relacionadas por cuanto $(I_U)_\lambda$ es la función λ-regularizada de I_U (véase la sección siguiente). Esta analogía permitirá un mismo tratamiento en la resolución de los problemas discretos que, como es lógico, estarán relacionados de la misma forma. No debe olvidarse, sin embargo, que la gran diferencia entre (49) y (50) estriba en que $(I_U)_\lambda$ es diferenciable mientras que I_U no lo es.

Un tratamiento numérico completo de las inecuaciones variacionales de segunda especie del tipo (49)-(50) se hace, por ejemplo, en Glowinski-Lions-Tremolie-res [24] y Glowinski[22] utilizando aproximaciones con elementos finitos y diferencias finitas y diversos algoritmos para la resolución de los problemas discretos no lineales correspondientes. Aplicaciones concretas al problema de Signorini (50) pueden verse en Oden-Kim[33], Oden-Kikuchi[32]. En este trabajo se intenta un tratamiento diferente en la línea de Bermúdez-Moreno[5] y Bermúdez[2,3]. Utilizando las aproximaciones con elementos finitos clásicas de los autores anteriores, se proponen nuevos algoritmos de resolución de los problemas discretos. Para ello son necesarios algunos resultados de la teoría de operadores monótonos que resumimos en la sección siguiente.

NOCIONES DE OPERADORES MAXIMALES MONOTONOS Y SU APLICACION

En esta sección se recuerdan algunos resultados relativos a operadores maximales monótonos y cálculo subdiferencial. Para una información detallada en este tema pueden consultarse las referencias Brezis[11] y Pazy[34]. Estas nociones serán la clave para una visión distinta de la sección precedente así como para la descripción del algoritmo iterativo de resolución del problema discreto.

Sea W un espacio de Hilbert con producto escalar (.,.) y norma inducida |.|. Sea $A: W \to \rho(W)$ un operador maximal monótono. Se designa por A^ω, $\omega \epsilon R$, el operador perturbado $A-\omega I$, con I operador identidad de W. Si $\lambda>0$ y $\lambda\omega<1$ el operador

$$J_\lambda^\omega = (I + \lambda A^\omega)^{-1} \tag{51}$$

está bien definido y se llama la resolvente de A^ω. La aproximación Yosida de A^ω con parámetro λ es el operador

$$A_\lambda^\omega = \frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda^\omega). \tag{52}$$

En particular para $\omega=0$ escribiremos simplemente J_λ y A_λ. Se prueba, entonces, que A_λ es también un operador (unívoco) maximal monótono y además:

$$|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2| \leqslant \frac{1}{\lambda}|x_1 - x_2| \quad , \quad \forall x_1, x_2 \epsilon W \tag{53}$$

$$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) \geqslant \lambda \quad |A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2|^2 \quad , \quad \forall x_1, x_2 \epsilon W. \tag{54}$$

Propiedades análogas se tienen también para $\omega \neq 0$ pero no serán utilizadas explícitamente en este trabajo.

A_λ y A_λ^ω están relacionados por la igualdad:

$$A_\lambda^\omega(x) = \frac{1}{1-\lambda\omega} A_{\lambda/1-\lambda\omega}\left(\frac{1}{1-\lambda\omega} x\right) - \frac{\omega}{1-\lambda\omega} x \,, \quad x\epsilon W. \tag{55}$$

Además en Bermúdez-Moreno[6] se demuestra que:

$$\begin{aligned}&(1)\quad y\epsilon A^{\omega}(x)\\&(2)\quad y\epsilon A_{\lambda}^{\omega}(x+\lambda y)\ \text{ con }\ \lambda>0,\ \lambda\omega<1\end{aligned}\tag{56}$$

son equivalentes.

Un caso particularmente interesante de operador maximal monótono es la subdiferencial. En efecto, sea $\psi: W \to (-\infty, +\infty]$ un funcional convexo, semicontínuo inferiormente y propio. Se llama subdiferencial de ψ al operador multívoco $\partial\psi : W \to \rho\,(W)$ caracterizado por:

$$(1)\quad \partial\psi(x) = \phi \quad \text{si} \quad \psi(x) = +\infty \tag{57}$$

$$(2)\quad \partial\psi(x) = \left\{ y\epsilon W : (z-x,y) + \psi(x) \leqslant \psi(z),\ \forall z\epsilon V \right\},\ \text{ si }\ \psi(x) < +\infty. \tag{58}$$

Se verifica entonces que $\partial\psi$ es un operador maximal monótono en W. Además, si ψ es diferenciable en $x\epsilon W$ entonces, $\partial\psi(x) = \left\{\psi'(x)\right\}$. Por otra parte es sencillo deducir de (58) la equivalencia de los dos problemas siguientes:

$$\psi(x) = \min_{z\epsilon V} \psi(z) \tag{59}$$

$$0\epsilon\partial\psi(x). \tag{60}$$

En cuanto a la aproximación Yosida $(\partial\psi)_\lambda$ del operador $\partial\psi$ se tiene la siguiente igualdad notable:

$$(\partial\psi)_\lambda(x) = \psi'_\lambda(x) \tag{61}$$

donde ψ_λ (llamada λ-regularizada de ψ) es la función convexa y diferenciable

$$\psi_\lambda(x) = \inf_{y\epsilon W} \left[\psi(y) + \frac{1}{2\lambda}\,|\, x-y\,|^2\right]. \tag{62}$$

Para las aplicaciones en este trabajo resulta fundamental el caso concreto en que ψ es la función I_U, indicatriz de un convexo, cerrado, no vacío de W. Se prueba sin demasiada dificultad que

$$(\partial I_U)_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I-P_U) \tag{63}$$

siendo $P_U : W \to U$ el operador de proyección ortogonal sobre U. Se tiene entonces para este caso:

$$(I_U)_\lambda(x) = \min_{y\epsilon U} \left[\frac{1}{2}\,|\, x-y\,|^2\right] = \frac{1}{2\lambda}\,|\, x-P_U x\,|^2. \tag{64}$$

de suerte que (61) se verifica. Esto justifica la notación introducida en (43).

Un resultado importante en el cálculo subdiferencial del que haremos uso es el siguiente, conocido como "regla de la cadena":

Sea E otro espacio de Hilbert y $B: W \to E'$ una aplicación lineal contínua con dual $B^*: E \to W'$. Se verifica:

$$B(\partial\psi(\Lambda_W^{-1}B^*p)) \subset \partial(\psi.\Lambda_W^{-1}.B^*)(p), \quad \forall p \epsilon E, \tag{65}$$

donde $\Lambda_W: W \to W'$ es el isomorfismo canónico. La inclusión recíproca no es cierta en general. Condiciones suficientes para ello son, por ejemplo las siguientes (véanse Ekeland-Temam[21] y Bermúdez[3], respectivamente):

$$\mathrm{Int}(\mathrm{dom}\ \psi) \neq \phi, \ \mathrm{dom}\ \psi = \left\{ x \epsilon W: \psi(x) < +\infty \right\} \tag{66}$$

$$\exists \beta > 0: \ |Bv|_{E'} \geqslant \beta\, |v|_W, \quad \forall v \epsilon W. \tag{67}$$

La condición (67) es la conocida "condición inf sup" de Brezzi[14]. Por otra parte (67) es equivalente a:

$$B^*(E) = W' \tag{68}$$

(véase Yosida[40], p. 208).

Ejemplo.— Consideremos el caso particular $W = L^2(\Gamma_C) = W'$, $E = V$, con B y B^* definidos en (37) y (38) y $\psi = I_U$. Se tendrá entonces

$$B(\partial I_U)(B^*v) \subset \partial(I_U B^*)(v), \quad \forall v \epsilon V \tag{69}$$

Para la inclusión recíproca sería suficiente verificar una de las condiciones (66), (67), (68). Ahora bien, puesto que $\mathrm{Int}(U) = \phi$ se deduce que (66) no es cierta. Por otra parte, (67) y (68) equivalen, en este caso, a la sobreyectividad de la aplicación:

$$B^*: v \epsilon V \to B^*(v) = v.n_{|\Gamma_C} \epsilon L^2(\Gamma_C) \tag{70}$$

Esto es evidentemente *falso* (tómese Γ_C con n constante en Γ_C y téngase en cuenta que la aplicación traza $\gamma_0: v\epsilon H^1(\Omega) \to \gamma_0(v) = v_{|\Gamma} \epsilon L^2(\Gamma)$ no es sobreyectiva).

Observación 2).— Si Ω es de frontera suficientemente regular se puede verificar la sobreyectividad de B^* en $H^{1/2}(\Gamma_C)$, al menos para $V = [H^1(\Omega)]^N$. En efecto, dado $q\epsilon H^{1/2}(\Gamma_C)$, sea $\tilde{q}\epsilon H^{1/2}(\Gamma)$ una extensión de q. Sea $\phi\epsilon H^1(\Omega)$ la única solución del problema:

$$\forall \psi \epsilon H^1(\Omega): \quad \int_\Omega \nabla\phi.\nabla\psi\, dx + \int_\Omega \phi\psi\, dx = \int_\Gamma \tilde{q}\psi\, d\gamma \tag{71}$$

Entonces $\phi\epsilon H^2(\Omega)$ —véase Lions-Magenes[21]— de modo que $v = \nabla\phi\epsilon V$. Se tiene, entonces, $B^*v = \dfrac{\partial\phi}{\partial n}_{|\Gamma_C} = q$.

Por tanto, (68) se verifica con $E = V$, $W = H^{-1/2}(\Gamma_C)$, $W' = H^{1/2}(\Gamma_C)$. Para una demostración directa véase Oden-Kikuchi[32].

Como aplicación directa de los resultados de esta sección (concretamente de (59), (60) y (69)) se deduce que el problema de Signorini (50) equivale a:

$$\begin{aligned} &u \in V \\ &L \in Au + \Lambda_V[\partial(I_U \circ B^*)(u)] \end{aligned} \tag{72}$$

donde A: $V \rightarrow V'$ es la aplicación lineal contínua definida por

$$\langle Au,v\rangle = a(u,v), \quad \forall u,v \in V. \tag{73}$$

En relación con (72), consideramos el problema siguiente:

$$\begin{aligned} &u \in V \\ &L \in Au + B\partial I_U(B^*u) \end{aligned} \tag{74}$$

Dada la inclusión (69) se deduce que si (74) tiene solución, entonces, ésta es única y coincide con la del problema (72). Puesto que el contenido recíproco de (69) no ha sido verificado no podemos afirmar la equivalencia de (72) y (74). *Suponiendo, entonces, que (74) tiene solución,* este problema es equivalente al problema de Signorini (50). Como veremos esta equivalencia se verifica en los problemas discretos correspondientes, de modo que será suficiente disponer de algoritmos para problemas de la forma (74), en dimensión finita.

Observación 3).— Utilizando los resultados de la observación 2), en Oden-Kikuchi[32] se demuestra la equivalencia de los problemas anteriores utilizando la dualidad $H^{1/2}(\Gamma_C)$, $H^{-1/2}(\Gamma_C)$ en lugar de $(.,.)$ en $L^2(\Gamma_C)$.

En lo que se refiere al problema de contacto con sólido elástico (49), dada la diferenciabilidad de $(I_U)_\lambda$ y la igualdad (44) se deduce la equivalencia de (49) con:

$$\begin{aligned} &u \in V \\ &L = Au + BG_\lambda B^*u \end{aligned} \tag{75}$$

Observamos entonces que el problema de Signorini (al menos en su versión discreta) y el problema de contacto con sólido elástico pertenecen ambos a la clase de problemas del tipo:

$$\begin{aligned} &u \in V \\ &L \in Au + BGB^*u \end{aligned} \tag{76}$$

donde G es un operador maximal monótono en un espacio de Hilbert E (en nuestro caso $L^2(\Gamma_C)$). La diferencia esencial entre ambos es que G es multívoco en (74) y unívoco en (75).

Utilizando la teoría de operadores monótonos, en Bermúdez-Moreno[5] y, más generalmente, en Bermúdez[2] se proponen algoritmos para la resolución de problemas de la forma (76). En el caso que nos ocupa el algoritmo de[5] se aplicará a las versiones discretas de (74) y (75), después de la aproximación con elementos finitos que se abordará en la Parte II de este artículo.

REFERENCIAS

1. R. A. Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press. New York (1975).
2. A. Bermúdez, Un método numérico para la resolución de ecuaciones con varias no-linealidades. Aplicación a un problema de flujo de gas en un conducto. *Revista de la R.A. Ciencias.* Madrid (Próxima aparición).
3. A. Bermúdez, *Elementos finitos mixtos para problemas no lineales.* Actas del IV Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones (C.E.D.Y.A.) Sevilla (1981).
4. A. Bermúdez y J. Durany, A finite element method for solving heat transfer problems with phase change in non-homogeneous media. En *Numerical methods for non-linear problems.* Vol. **2** Ed. Taylor-Hinton-Owen-Oñate. Pineridge Press. Swansea, U.K. (1984).
5. A. Bermúdez y C. Moreno, Duality methods for solving variational inequalities. *Comp. Math. with App.* Vol. **7** pp. 43-58, (1981).
6. A. Bermúdez y C. Moreno, *Application of pursuit method to optimal control problems.* (Próxima aparición).
7. A. Bermúdez y J.M. Viaño, Some numerical methods in elastoplasticity. *Calcolo,* Vol . **XIX** fasc. IV pp. 335-353, (1982).
8. A. Bermúdez y J.M. Viaño, Etude de deux schémas numériques pour les équations de la thermoélasticité. R.A.I.R.O. *Analyse Numérique:* Vol. **17** n.º 2, pp. 121-136, (1983).
9. A. Bermúdez y J.M. Viaño, Algoritmos iterativos para el problema de elastoplasticidad con endurecimiento. En *1.er Simposium Nacional sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería.* Ed. Oñate-Alonso-Casteleiro. Barcelona (1982).
10. H. Brezis, *Problèmes unilateraux.* J. de Math. Pures et Appliquées. Vol. **IX,** serie 72, pp. 1-68, (1971).
11. H. Brezis, *Operateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* Norht-Holland. Amsterdam (1973).
12. H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle. Theorie et Applications.* Masson-París (1983).
13. H. Brezis, M. Crandall y A. Pazy, Perturbations of nonlinear monotone sets in Banach spaces. *Comm. Pure Applied, Math,* Vol. **23**, pp. 123-144, (1970).
14. F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers. R.A.I.R.O. *Analyse Numerique*, Vol. **8**, pp. 129-151, (1974).
15. F. Brezzi , W. Hager y P.A. Raviart, Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. *Numer. Math.,* Vol. **28,** pp. 431-443, (1977).
16. L.T. Campos, J.T. Oden y N. Kikuchi, A numerical anaylysis of a class of contact problems with friction in elastostatics *Comp. Meth. App. Mech. and Eng.,* Vol. **34,** pp. 821-845, (1982).
17. P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland. Amsterdam, (1978).
18. P.G. Ciarlet, M.H. Schultz y R.S. Varga, Numerical methods for high order accuracy for nonlinear boundary value problems. V. Monotone Operator theory. *Numerishe, Math.,* Vol. **13,** pp. 51-77, (1969).
19 M. Cocu, Existence of solutions of Signorini problems with friction. *Int. J. Engng. Sci.* Vol. **22,** n.º 5, pp. 567-575, (1984).
20. G. Duvaut y J.L. Lions, *Inequalities in mechanics and physics.* Springer-Verlag. Berlin, (1976).
21. I. Ekeland y R. Temam, *Analyse Convexe et problèmes variationnelles.* Gautier-Villars. París, (1984).
23. R. Glowinski, *Numerical Analysis of Nonlinear Boundary value Problems (I). Methods of Convexity and Monotonicity.* (En preparación).
24. R. Glowinski, J.L. Lions y R. Tremolières, *Analyse Numerique des Inequations Variationnelles.* Dunod-Bordas. París, (1976).
25. J. Haslinger, *Mixed Variational formulation of elliptic inequalities. Approximation theory.* Lecture Notes 2 Department of Mathematics. University of JYVÄSKYLÄ, (1983).

26. E. Isaacson y H.B. Keller, *Analysis of numerical methods.* Ed. John Wiley and Sons. New York, (1966).
27. N. Kikuchi y J.T. Oden, Contact problems in elasticity. SIAM Studies in Applied Mathematics. *SIAM Publication*, Philadelphia, (1982).
28. J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéares.* Dunod. Gautier-Villars, París, (1969).
29. J.L. Lions y E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogénes et applications.* Dunod. París, (1968).
30. J.A.C. Martins y J.T. Oden, A numerical analysis of a class of problems in elastodynamics with friction. *Comp. Meth. App. Mech. and Eng.*, Vol. **40**, pp. 327-360, (1983).
31. J. Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson. París, (1967).
32. J.T. Oden y N. Kikuchi, Finite element methods for constrained problems in elasticity. *Int. J. Num. Meth. Eng.* Vol. **18**, pp. 701-725, (1982).
33. J.T. Oden y S.J. Kim, Interior penalty methods for finite element approximations of the Signorini problem in elastostatics. *Comp. and Math. with App.*, Vol. **8**, n.º 1, pp.35-56, (1982).
34. J.T. Oden y E.B. Pires, Non local and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. *J. App. Mech*, Vol. **50**, (1983).
35. A. Pazy, Semigroups of non-linear contractions in Hilbert spaces. En *Problems in Nonlinear Analysis.* C.I.M.E. Ed. Cremonese. Roma, (1971).
36. G. Stampacchia, *Equations elliptiques du second-ordre à coefficients discontinus.* Séminaire de Mathematiques Supérieures. Presses de L'Université de Montréal, (1965).
37. J.M. Viaño, Existencia y aproximación de soluciones en termoelasticidad y elastoplasticidad. *Tesis Doctoral.* Univ. Santiago de Compostela, (1981).
38. J.M. Viaño, *Calcul de contraintes en elastoplasticité bi et tridimensionnelle.* Module ELAPLA. Publication MODULEF- I.N.R.I.A. Rocquencourt, n.º 89, (1982).
39. J.M. Viaño, Une méthode de resolution de problèmes de contact unilateral en élasticité et son implementation dans MODULEF. *Rapport de Recherche I.N.R.I.A.* Rocquencourt, (1985). (En preparación).
40. K. Yosida, *Functional Analysis.* Springer-Verlag. Berlin, (1980).